NIVEAU ○○○

WISKUNDE BIJ POOLBILJARTEN: HET GOEDE PUNT RAKEN

Naar aanleiding van het Smartpool scholenproject besteedt Pythagoras dit schooljaar in ieder nummer aandacht aan verschillende (wiskundige) aspecten van het poolbiljarten. In dit tweede artikel uit de serie leer je over de meetkunde achter botsende bollen.

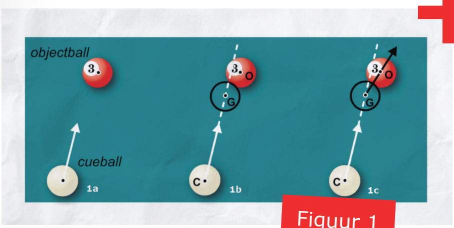
door **Erik van Haren**

Bij het poolbiljarten is er één bal die je met de keu in beweging mag brengen (stoten). Die bal noemen we de *cue ball* (stootbal). Daarmee moet je een andere bal (*object ball* genaamd) in een gat (*pocket*) in de biljarttafel stoten (*potten*).

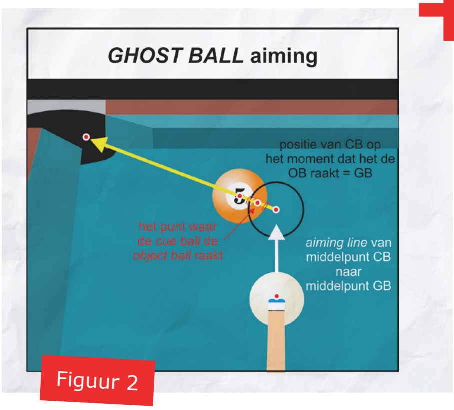
DE GHOST BALL

Wat gebeurt er wanneer een *cue ball* een *object ball* raakt? Zie het bovenaanzicht in figuur 1. Je stoot bijvoorbeeld de *cue ball* vanaf middelpunt C in de richting aangegeven in figuur 1a. In figuur 1b is het moment aangegeven waarop de *cue ball* de *object ball* raakt. Het middelpunt van de *object ball* noemen we *O* en van de *cue ball* op dat moment *G*. In figuur 1c is de richting van de *object ball* na de botsing aangegeven met een zwarte pijl.

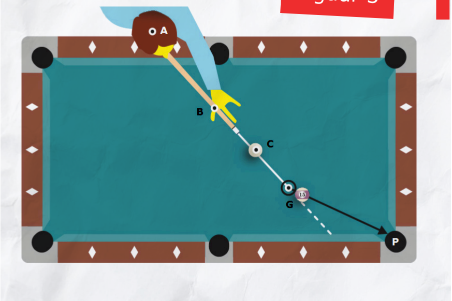
De *cue ball* op het moment van raken, noemen we *ghost ball*. De *ghost ball* en de *object ball* hebben één punt gemeenschappelijk, dat noemen we het raakpunt. Dat punt ligt op lijnstuk *OG*. Zie ook figuur 2, waarin te zien is hoe het er vanuit het oogpunt van de speler uitziet.



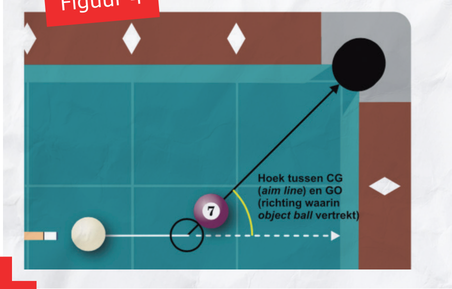
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

De richting waarin je stoot (*CG*) wordt de *aim line*. Om de *cue ball* te spelen zal de keu in lijn van *CG* moeten liggen. Hiervoor zullen je voorhand, arm en hoofd ook in dezelfde lijn moeten liggen zoals in het bovenaanzicht in figuur 3.

De hoek tussen de *aim line CG* en de richting waaronder de *object ball* vertrekt *GO* noemen we de hoek waaronder een *object ball* wordt geraakt. Zie ook figuur 4.

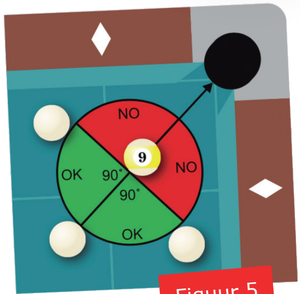
De volheid (gedeelte overlap) waarmee de *cue ball* deze *object ball* raakt bepaalt de hoek waaronder de *object ball* vertrekt. We noemen een bal vol wanneer het middelpunt van de *cue ball* in de richting van het middelpunt van de *object ball* gestoten wordt.

OPGAVE 1

a) Is het mogelijk om de *object ball* over dezelfde lijn te laten vertrekken als de *cue ball*?
b) Wat is de grootste hoek waaronder de *object ball* kan vertrekken?
c) Wanneer de *cue ball* de *object ball* voller raakt, zal de hoek waaronder de *object ball* vertrekt dan kleiner of groter zijn?
d) Wanneer de *cue ball* de *object ball* voller raakt, zal de snelheid waarmee de *object ball* vertrekt dan lager of hoger zijn?

WEL OF NIET TE POTTEN?

Elke *object ball* die een vrije baan heeft naar een *pocket* is te potten, maar niet vanuit elke hoek. In figuur 5 is met groen aangegeven vanwaar de *object ball* te potten is en met rood vanwaar dat niet mogelijk is.

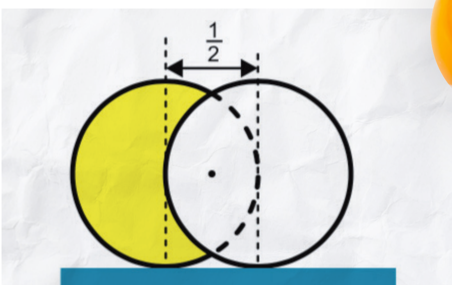


Figuur 5

De grootste hoek waaronder je een bal nog kan potten is 90°, je moet dan wel erg hard spelen om de snelheid over te brengen op de *object ball*. Wanneer je de *object ball* dunner raakt, zal deze namelijk minder snelheid meekrijgen.

HALF VOL RAKEN

Wanneer je met de *cue ball* de *object ball* niet vol raakt, vertrekt deze onder een hoek. Figuur 6 laat een vooraanzicht zien van een situatie waarbij de *cue ball* de *object ball* precies halfweg raakt.

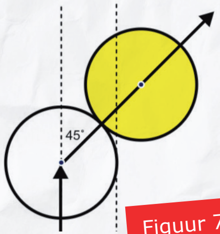


Figuur 6

>>

OPGAVE 2

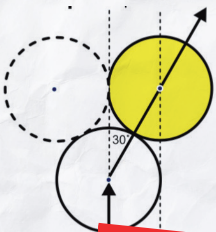
Als de object-ball onder een hoek van 45° vertrekt, was deze dan half vol geraakt?



Figuur 7

OPGAVE 3

In figuur 8 zie je een bovenaanzicht van de situatie waarbij de *cue ball* zo gestoten wordt dat hij precies de helft van de *object ball* raakt (dus half vol raken). Het lijkt erop dat de hoek waaronder de *object ball* vertrekt 30 graden is. Kun je narekenen of dat zo is?



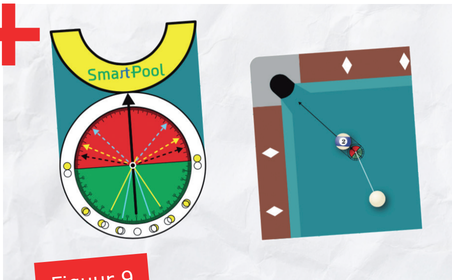
Figuur 8

HET RAAKPUNT VINDEN MET DE SPAT

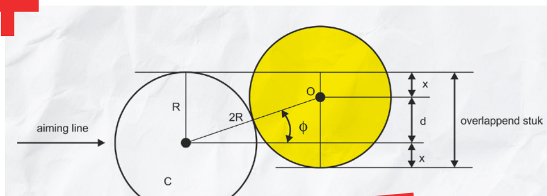
Hoe vind je het goede raakpunt? Je kunt hiervoor de SmartPool Aiming Tool (SPAT) gebruiken. Leg de gele halve ring direct onder de te potten *object ball*, met de pijl in de richting van de *pocket*. Richt de *cue ball* op de stip in het midden van de cirkel. De *object ball* is potbaar zolang de lijn vanuit *C* naar dat punt in het groene deel ligt.

VERHOUDING TUSSEN HOEK EN OVERLAPPEND STUK.

In figuur 10 noemen we *R* de straal van de bal en de hoek noemen we ϕ. Er geldt:



Figuur 9



Figuur 10

$d + x = R$ en $d = 2R \cdot \sin(\phi)$. Het overlappende deel is $d + 2x$.

OPGAVE 4

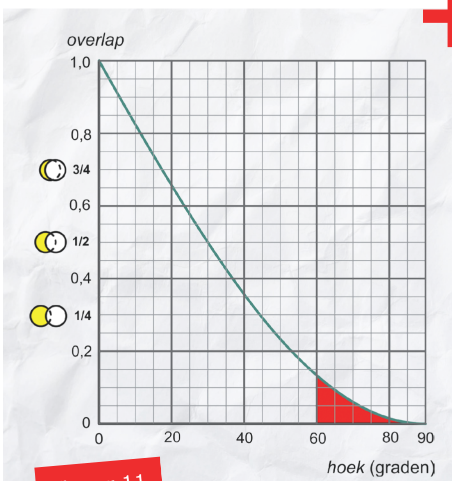
Laat zien dat voor het relatieve overlappende deel geldt:

$$\frac{\text{overlappend stuk}}{\text{diameter}} = 1 - \sin(\phi)$$

Als je in een grafiek $f(\phi) = 1 - \sin(\phi)$ bekijkt en dus de hoek waaronder je de bal moet raken op het domein [0°, 90°], krijg je een deel van een sinusoïde te zien (figuur 11). Je kunt hierin zien dat hoeken groter dan 60° erg lastig zijn te richten (rood gebied). Een kleine afwijking in de overlap heeft grote gevolgen voor de hoek.

OPGAVE 5

Welk deel overlap moet je raken om een *object ball* onder een hoek van 45° te laten vertrekken?



Figuur 11

Rank	Order	Percentage
1	1/2	34
2	3/4	16
3	7/8	16
4	1/4	13
5	full	10
6	1/8	7
7	feather	4
		100

Figuur 12

In het boek "*Mind over Billiards*" van Del Thiessen staat een tabel over de frequentie van verschillende contacten tussen de *cue ball* en *object ball.* Deze tabel is hier overgenomen in figuur 12. De 510 stoten van een willekeurige poolwedstrijd staan gecategoriseerd in 7 groepen: 1/2, 3/4, 7/8, 1/4, vol, 1/8 en *feather* (dun).

OPGAVE 6

Bereken met behulp van de formule bij opgave 4 de hoek waaronder de *cue ball* vertrekt bij de vier meest voorkomende situaties:

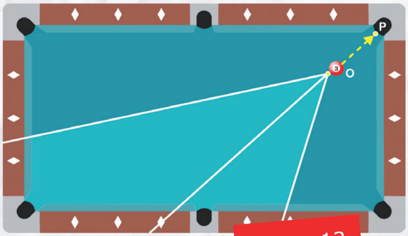
Een bal dunner dan 1/4 deel raken gebeurt dus maar in zo'n 10% van alle stoten.

OPGAVE 7

Een poolspeler zal altijd proberen om binnen de 1/2 *ball hit* lijnen uit te komen voor een ideale pot positie.
Kun je dit verklaren aan de hand van de grafiek in figuur 11?

OPGAVE 8

Laat zien dat op basis van de tabel van Thiessen in ruim 75% vanuit dit gebied wordt gepot.
Teken in figuur 13 de ¾ en ¼ lijn erbij.



Figuur 13

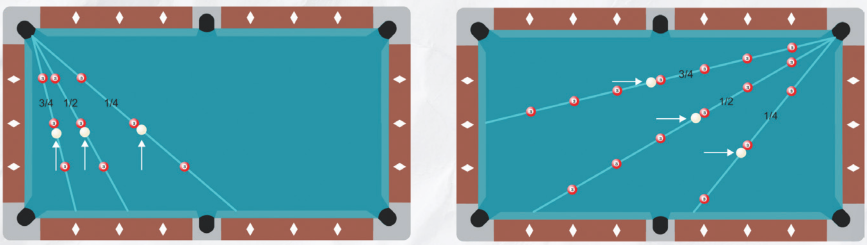
OEFENINGEN AAN TAFEL

Het is belangrijk om te oefenen met de vaakst voorkomende situaties. Dit kan je doen door de *object ball* onder een hoek van 15, 30 of 45 graden met de korte of lange band te leggen en de *cue ball* evenwijdig aan die band te spelen (zie figuur 14). Door steeds de juiste plek te zoeken om de *cue ball* neer te leggen train je je hersenen om de belangrijkste hoeken te herkennen en zal je potvermogen toenemen.
Het volgende artikel zal ik wat uitleg geven over het bandenspel. Ik wens jullie veel poolplezier!

<<

BRONNEN

- Dave Alciatore, "Billiard and Pool Principles, Techniques, Resources": billiards.colostate.edu
- Del Thiessen, "Mind over Billiards"



Figuur 14

NIVEAU ○○○

PYTHAGORAS PROFIELWERKSTUK PRIJS

P Y T H A
G O R A S
P R O F I
E L W E R
K S T U K
P R I J S

Ben je bezig met je profielwerkstuk en gaat het over wiskunde? Stuur je werkstuk dan op naar de redactie van dit tijdschrift! Pythagoras looft drie prijzen uit voor de beste wiskundeprofielwerkstukken van dit schooljaar. De prijzen zijn 250, 125 en 75 euro en bij voldoende kwaliteit een artikel in Pythagoras. Vanzelfsprekend moet het onderwerp van je profielwerkstuk wiskundig van aard zijn of een belangrijke wiskundige toepassing bevatten.
De wedstrijd is als volgt georganiseerd. Universitaire wiskundigen uit verschillende vakgebieden selecteren maximaal drie profielwerkstukken. De auteurs van deze profielwerkstukken houden een presentatie van tien minuten op het Nederlands Mathematisch Congres 2019, dat op 23 en 24 april in Veldhoven zal plaatsvinden.
De eerste, tweede en derde prijs worden daar door middel van een stemming onder het publiek bepaald.
Je profielwerkstuk ontvangen we graag in pdf. Als je meedoet ga je er mee akkoord dat je profielwerkstuk op onze website publiekelijk toegankelijk zal zijn. Stuur het bestand (en je naam, adres en school) naar profielwerkstuk@pyth.eu. Je inzending moet uiterlijk 31 maart 2019 bij ons binnen zijn.

SMARTPOOL "WISKUNDE AAN DE POOLTAFEL"

Erik van Haren heeft een werkboekje geschreven naar aanleiding van de vraag vanuit de KNBB om de pooltafel als middel in te zetten om wiskundige vragen te beantwoorden. Bij het doorwerken van het boekje zul je interessante wiskunde tegenkomen en tegelijkertijd veel leren van het poolspel. Met de bijgeleverde SPAT heb je een hulpmiddel in handen om de theorie in de praktijk toe te passen.

Het boekje is te koop via www.smartpool.nl en www.mathplay.nl

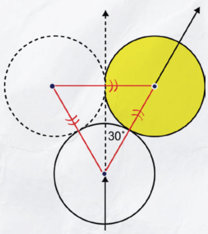
Voor Pythagoras-lezers is het boekje met korting te bestellen. Door bij de bestelling van een boekje de actiecode pythpool te vermelden, ontvang je het boekje inclusief SPAT en verzendkosten voor € 4,95 i.p.v. € 7,25.

ANTWOORDEN POOLBILJART 2

OPGAVE 1
a) Ja. Dan moet het middelpunt van de *cue ball* in de richting van het middelpunt van de *object ball* gespeeld worden.
b) Dat is 90°.
c) Als de *cue ball* de *object ball* voller raakt, zal de hoek waaronder de *object ball* vertrekt kleiner zijn.
d) Als de *cue ball* de *object ball* voller raakt, zal de snelheid waarmee de *object ball* vertrekt hoger zijn.

OPGAVE 2
Kleiner dan 45°.
In de figuur is duidelijk te zien dat de *object ball* minder dan een halve baldikte geraakt moet worden om onder een hoek van 45° te vertrekken. Dus bij een voller contact zal de hoek kleiner zijn.

OPGAVE 3
De gelijkzijdige driehoek in de figuur hiernaast heeft drie hoeken van 60°.
De *aim line* deelt een van de hoeken in twee exact gelijke delen: 30° dus.



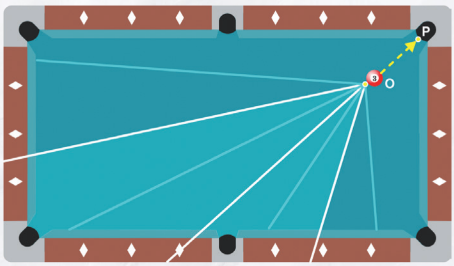
OPGAVE 4
$$\frac{\text{overlappend stuk}}{\text{diameter}} = \frac{R+x}{2R} = \frac{2R-d}{2R} = 1-\sin(\phi).$$

OPGAVE 5
$1-\sin(45^\circ) = 1-\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}3$
dus ongeveer 3/10 deel.

OPGAVE 6
Ongeveer 49°, 30°, 14°, 7°.

OPGAVE 7
Wanneer een bal met minder dan 1/4 overlap geraakt wordt is het lastiger om de hoek nauwkeurig te bepalen (rode deel in de grafiek).

OPGAVE 8
a) 34% + 16% + 16% + 10% = 76%
b) Zie de figuur hieronder.



ANTWOORDEN BIJ ARCHIMEDES EN DE BOL

OPGAVE 1
In onze notatie is, met r de straal van de bol, $V_{\text{kegel}\,AEF} = \frac{\pi(2r)^2 \cdot 2r}{3} = \frac{8\pi r^3}{3}$. Hij wil dus uitkomen dat (het volume van) de bol en (het volume van) de kegel zich verhouden zoals 1 : 2.

OPGAVE 2
De doorsnede van de cilinder heeft oppervlakte $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$.
De doorsnede van de kegel heeft straal $SQ = AS = x$ en dus oppervlakte πx^2.
De doorsnede van de bol heeft straal $SO = \sqrt{r^2-(r-x)^2}$ (stelling van Pythagoras in $\triangle OKS$) en dus oppervlakte

$$\pi(r^2-(r-x)^2) = \pi(2rx-x^2).$$

OPGAVE 3
We vinden:
$d_1 \cdot m_1 = x \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 x$
$d_2 \cdot m_2 = 2r \cdot (\pi x^2 + \pi(2rx-x^2)) = 4\pi r^2 x$.

OPGAVE 4
$V_{\text{cilinder}} \cdot AK = (V_{\text{bol}} + V_{\text{kegel}\,AEF}) \cdot AJ$
$\Rightarrow (3 \cdot V_{\text{kegel}\,AEF}) \cdot r = (V_{\text{bol}} + V_{\text{kegel}\,AEF}) \cdot (2r)$
$\Rightarrow 3V_{\text{kegel}\,AEF} = 2V_{\text{bol}} + 2V_{\text{kegel}\,AEF}$
$\Rightarrow V_{\text{kegel}\,AEF} = 2V_{\text{bol}}$
$\Rightarrow V_{\text{bol}} : V_{\text{kegel}\,AEF} = 1:2$